

## Leçon 105

Groupe des permutations d'un ensemble fini.  
Applications.

### I - Groupes symétriques

### II - Signature et groupe alterné

### III - Applications

Dev 1 : Nombre de cycles d'une permutation aléatoire

Dev 2 : Automorphismes de  $\mathfrak{S}_n$

### I - Groupes symétriques

**1) Groupes de permutations :** def, cardinal, groupe des bijections, théorème de Cayley, on se ramène à  $\mathfrak{S}_n$ , action sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , support, supports disjoints  $\Rightarrow$  commutent [Ulm12], [Ber18]

**2) Décomposition en produit de cycles :** def cycle, ordre, décomposition en cycles à supports disjoints, [dev 1], conjugaison, def type, calcul ordre, exemples [Ber18]

**3) Générateurs :** cycles, transpositions,  $(1\ j)$ ,  $(i\ i+1)$ , [dev 2],  $(1\ 2)$  et un  $n$ -cycle [Ber18]

**4) Nombre de points fixes :** calcul via décomposition en cycles, calcul pour une permutation aléatoire, dérangements [Gou21], [FGN07]

### II - Signature et groupe alterné

**1) Signature :** existence et unicité, calcul via les cycles, formule générale, interprétation [Ber18]

**2) Groupe alterné et sous-groupes distingués :** def, distingué, cardinal, générateurs, simplicité, centre et sous-groupes distingués de  $\mathfrak{S}_n$  [Ber18]

### III - Applications

**1) Déterminant :** def, formule explicite, cas matrice triangulaire,  $\det = \text{produit des vp}$ , développement selon une (ou des?) ligne/colonne, degré polynôme caractéristique, exemples,  $\text{rq} : \text{tout ça a du sens sur un anneau}$

**2) Polynômes symétriques :** def polynômes symétriques, sym élémentaires, nul en les  $\Sigma_i \Rightarrow \text{nul}$ , théorème de structure, algorithme, exemples [Ber18]

**3) Matrices de permutations :** def, déterminant, tout groupe fini se plonge dans  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ , cor : existence de  $p$ -Sylow [Rom21]

**4) Groupes d'isométries :** isométries préservent isobarycentre et points extrémaux, groupes d'isométries de polygones, des triangles, du tétraèdre, du cube, du dodécaèdre [CG18]

## Références

- [Ber18] Grégory BERHUY. *Algèbre : Le grand combat*. Calvage & Mounet, 2018.
- [CG18] Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome Second*. Calvage & Mounet, 2018.
- [FGN07] Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Oraux X/ENS Algèbre 1*. Cassini, 2007.
- [Gou21] Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. ELLIPSES, 2021.
- [Rom21] Jean-Etienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck supérieur, 2021.
- [Ulm12] Félix ULMER. *Théorie des groupes*. Ellipses, 2012.